

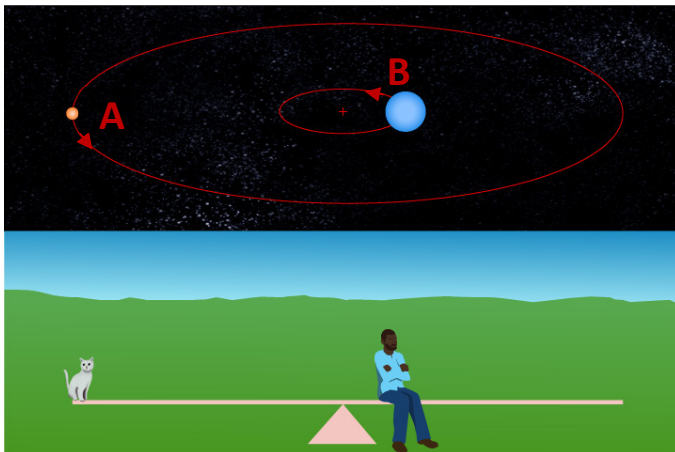
## Tema: Exoplaneter (Del III, banhastighet och massa)

Det vi hittills tittat på är hur man beräknar radien och avståndet till stjärnan för en exoplanet. Omloppstiden kunde vi exempelvis få fram genom att se hur lång tid mellan passagera framför stjärnan en exoplanet har. Detta gjorde att vi kunde beräkna medelavståndet till stjärnan.

I det här avsnittet ska vi titta på hur man kan beräkna **massan** för en exoplanet. För att göra detta krävs en förståelse för två fysikaliska samband, nämligen rörelsemängd samt dopplereffekt.

### Dopplereffekt

Att Jorden rör sig runt solen är egentligen bara delvis rätt, det är nämligen så att Jorden rör sig runt en punkt i rymden som kallas *masscentrum*. Det gör även solen.



När Jorden rör sig i riktningen vid A, kommer solen att röra sig i riktningen vid B. Denna skiss är väldigt överdriven och masscentrum för Jorden-Solen befinner sig egentligen långt innanför solens radie.

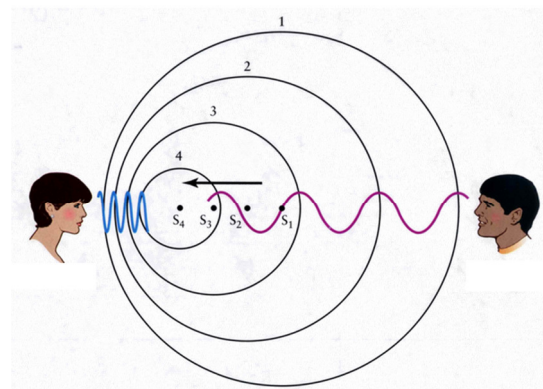
Man kan tänka sig att det fungerar som en gungbräda. Katten i bilden motsvarar Jorden, mannen motsvarar Solen. Mellan dessa två finns en tyngdpunkt som gör att gungbrädan balanseras. Om nu hela gungbrädan skulle rotera, skulle katten röra sig snabbt runt tyngdpunkten, medan mannen skulle röra sig långsammare. Trots

att båda rör sig ett varv runt masscentrum på samma tid.

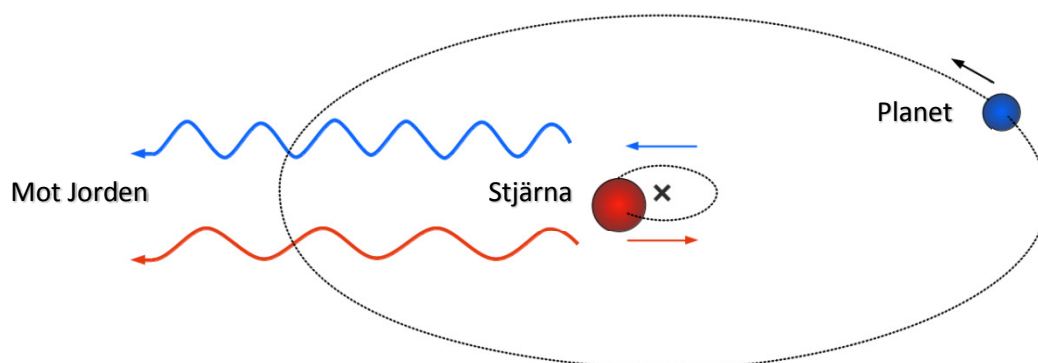
När vi observerar en ljuskälla som rör sig mot oss, kommer ljusets våglängd minska och när ljuskällan rör sig bort från oss ökar våglängden. Detta kallas *dopplereffekten*.

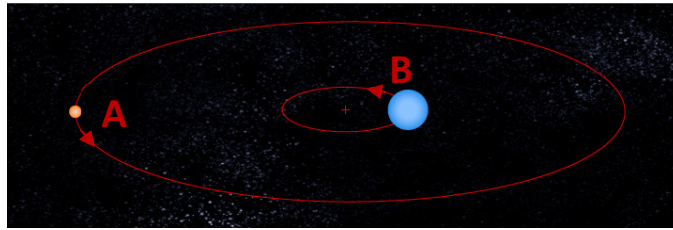
På bilden här till höger rör sig en ljuskälla i pilens riktning. Kvinnan ser en minskning av våglängden (blåförskjutning), mannen ser en ökning av våglängden (rödförskjutning).

På så sätt kan vi veta om en ljuskälla rör sig mot oss eller ifrån oss.



Om vi nu tänker oss en planet i omloppsbana kring en stjärna och vi ser systemet från sidan (d.v.s. inte ovanifrån), kommer stjärnans ljus vara blåförskjutet när den rör sig mot oss och rödförskjutet när den rör sig bort från oss. **Genom observationer av stjärnans spektrum kan vi översätta denna förskjutning till en hastighet som stjärnan har runt masscentrum (den lilla cirkeln runt tyngdpunkten i bilden nedan).**





### Rörelsemängd

Som en konsekvens av Newtons första och andra lag kommer ett objekt i rörelse ha en viss rörelsemängd. Nämligen hastigheten (i m/s) multiplicerat med massan (i kg).

En planet A har då rörelsemängden;

$$P_{planet} = M_{planet} * v_{planet}$$

Där:

M = Massan (i kg)

v = Medelhastigheten runt masscentrum (i m/s)

Samma sak gäller stjärnan B;

$$P_{stjärna} = M_{stjärna} * v_{stjärna}$$

I systemet är rörelsemängden bevarad, så rörelsemängden för planeten A är lika stor som för stjärnan B. Vi kan då sätta upp följande samband;

$$M_{stjärna} * v_{stjärna} = M_{planet} * v_{planet}$$

Vi är nu ute efter att bestämma **massan** för en exoplanet (rött i sambandet ovanför) som rör sig runt en stjärna. Detta kan vi nu göra om vi känner till stjärnans massa och dess hastighet runt masscentrum, samt planetens hastighet runt masscentrum.

$M_{stjärna}$ : Känner vi till genom observationer av stjärnans ljus.

$V_{stjärna}$ : Känner vi till genom *dopplereffekten* som du läst om på förra sidan.

$V_{planet}$ : Kan vi beräkna om vi vet medelavståndet till stjärnan, samt omloppstiden.

### Planetens banhastighet

Medelhastigheten (i m/s) för planeten kan vi beräkna genom att ta sträckan planeten färdas runt stjärnan (cirkelns omkrets), dividerat på tiden det tar;

$$v_{planet} = \frac{2 * \pi * a}{P}$$

Där:

a = Medelavståndet mellan stjärnan och planeten (i m)

P = Omloppstiden för planeten (i sekunder)

### Exempel 1:

Hur stor är medelhastigheten för Jorden i sin omlopps bana kring solen? Medelavståndet till Solen är ca 150 000 000 km. Tiden det tar för Jorden att göra ett varv är 1 år. (Svara i tusental m/s)

Lösning :

$$v_{planet} = \frac{2 * \pi * a}{P}$$

$$v_{planet} \approx \frac{2 * \pi * (150\,000\,000\,000\,m)}{(365 * 24 * 60 * 60s)}$$

$$v_{planet} \approx \frac{2 * \pi * (150\,000\,000\,000\,m)}{(31\,536\,000s)}$$

$$v_{planet} \approx \frac{3,14 * (300\,000\,000)}{(31\,536)}$$

$$v_{planet} \approx \frac{942\,000\,000}{31\,536}$$

$$v_{planet} \approx 29\,871\,m/s \approx 30\,000\,m/s$$

Svar: Medelhastigheten för Jorden är ca 30 000 m/s.

Sätt in värden för medelavståndet  $a$  (i meter) och tiden  $P$  (i sekunder).

Multiplitera med medelavståndet med 2, för att få diametern på cirkeln. Räkna med  $\pi$  som 3,14.

### Exempel 2:

Hur snabbt rör sig Solen runt masscentrum på grund av Jorden? Solens massa är ca  $2 * 10^{30}$  kg och Jordens massa är ca  $6 * 10^{24}$  kg. (Svara i lämplig enhet)

Lösning :

$$M_{stjärna} * v_{stjärna} = M_{planet} * v_{planet}$$

$$v_{stjärna} = \frac{M_{planet} * v_{planet}}{M_{stjärna}}$$

$$v_{stjärna} = \frac{6 * 10^{24} * 3 * 10^4}{2 * 10^{30}}$$

$$v_{stjärna} = \frac{6 * 3 * 10^{28}}{2 * 10^{30}} = \frac{18 * 10^{28}}{2 * 10^{30}} = 9 * 10^{-2} m/s = 0,09 m/s = 9 cm/s$$

Svar: Solen rör sig i ca 9 cm/s runt masscentrum på grund av Jorden.

Vi använder oss av formeln för rörelsemängdens bevarande. Medelhastigheten  $v$  för stjärnan sökes (rödmarkerad).

Dividera båda led med solens massa för att få hastigheten ensam i VL.

Sätt in värden för Jordens massa, hastighet samt solens massa i formeln. Använd dig av regler för tiopotensräkning. Jordens hastighet beräknade vi i det förra exemplet.

### Exempel 3:

Exoplaneten Kepler 22b som vi räknat på tidigare har en omloppstid på 290 dagar och medelavståndet till stjärnan räknade fram ut i del 2. Nämligen 0,85 ae. En dopplermätning av stjärnans ljus visar att stjärnan periodvis rör sig mot oss i 5m/s, sedan bort från oss i samma hastighet. Ungefär hur stor massa har Kepler 22b om stjärnans massa är 0,97 solmassor? (Svara i antal Jordmassor)

#### FAKTA

$$1 \text{ ae} \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$1 \text{ solmassa} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ jordmassa} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Lösning :

$$v_{\text{planet}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot a}{P}$$

$$v_{\text{planet}} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot (0,85 \cdot 150\,000\,000\,000\text{m})}{(290 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\text{s})}$$

$$v_{\text{planet}} \approx \frac{2 \cdot \pi \cdot (127\,500\,000\,000\text{m})}{(25\,056\,000\text{s})}$$

$$v_{\text{planet}} \approx \frac{3,14 \cdot (255\,000\,000)}{(25\,056)}$$

$$v_{\text{planet}} \approx \frac{800\,700\,000}{25\,056}$$

$$v_{\text{planet}} \approx 32\,000 \text{ m/s}$$

Rörelsemängdens bevarande ger;

$$M_{\text{stjärna}} \cdot v_{\text{stjärna}} = M_{\text{planet}} \cdot v_{\text{planet}}$$

$$M_{\text{planet}} = \frac{M_{\text{stjärna}} \cdot v_{\text{stjärna}}}{v_{\text{planet}}}$$

$$M_{\text{planet}} = \frac{(0,97 \cdot 2 \cdot 10^{30}) \cdot 5}{32\,000}$$

$$M_{\text{planet}} = \frac{9,7 \cdot 10^{30}}{32\,000} = \frac{9,7 \cdot 10^{27}}{32}$$

$$M_{\text{planet}} = 0,303 \cdot 10^{27} \approx 3 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

$$M_{\text{planet}} = \frac{3 \cdot 10^{26}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{300 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 10^{24}} = 50 \text{ jordmassor}$$

Svar: Kepler 22b har en massa på cirka 50 jordmassor

Sträckan planeten färdas kan ses som en cirkel med radien "a". Sträckan / tiden = medelhastigheten.

Sätt in värden för medelavståndet a (i meter) och tiden P (i sekunder).

Multiplitera med medelavståndet med 2, för att få diametern på cirkeln. Räkna med pi som 3,14. Förkorta bort tre nollor i täljare och nämnare.

Nu vet vi hur snabbt planeten rör sig runt masscentrum.

I formeln som beskriver rörelsemängdens bevarande känner vi nu till tre av fyra variabler. Uppgiften var att bestämma planetens massa M (rödmarkerad).

Dividera båda led med planetens hastighet, så vi får planetens massa ensam i VL.

Sätt in värden för stjärnans massa i kg, hastigheten kring masscentrum, samt planetens hastighet.

Här kan vi förenkla täljaren. Eftersom  $2 \cdot 5 = 10$ , kan vi göra 0,97 10 ggr större. Sedan förkorta med tusen. Ta bort nollorna i 32 000 samt minska exponenten i täljaren till 27.

Dividera nu planetens massa i kg med jordens massa. Gör tiopotenserna lika stora och förkorta bort dessa. Kvar blir  $300/6=50$ .

Lös dessa uppgifter med hjälp av miniräknare.

FAKTA

$$1 \text{ ae} \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$1 \text{ solmassa} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

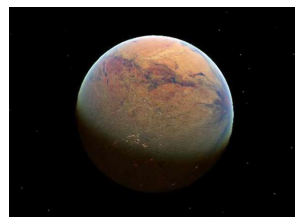
$$1 \text{ jordmassa} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$1 \text{ jupitermassa} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

1) a) Hur snabbt rör sig Jupiter i sin bana kring solen? Jupiters medelavstånd till Solen är ca 5,2 ae och det tar ca 12 år för planeten att göra ett varv. (Svara i m/s)

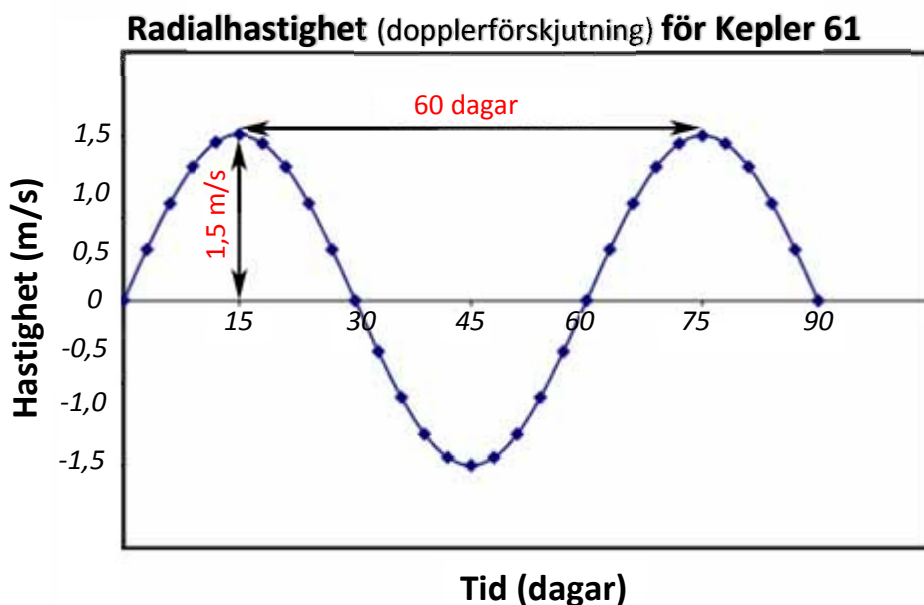
b) Hur snabbt rör sig Solen kring masscentrum på grund av Jupiter? (Svara i m/s)

2) Rymdteleskopet Kepler har upptäckt att en planet kretsar runt en stjärna med 0,64 solmassor. Planeten som fått namnet Kepler-61b, befinner sig på ett avstånd av 0,26 ae och tiden det tar för planeten att göra ett varv är 60 dagar. Dopplermätningar av stjärnan (Kepler-61) visar att den rör sig i 1,5 m/s kring masscentrum, se bild.



a) Beräkna medelhastigheten för planeten kring masscentrum. (Svara i m/s)

b) Beräkna planetens massa. (Svara i antal jordmassor)



## LÖSNINGSFÖRSLAG

1) a)

$$v_{\text{planet}} = \frac{2 * \pi * a}{P}$$
$$v_{\text{planet}} = \frac{2 * \pi * (5,2 * 150 * 10^9)}{(12 * 365 * 24 * 60 * 60)}$$
$$v_{\text{planet}} \approx \frac{5 * 10^{12}}{(3,8 * 10^8)}$$
$$v_{\text{planet}} \approx 1,3 * 10^4 \text{ m/s} = 13 \text{ km/s}$$

**SVAR:** Jupiters medelhastighet runt Solen är ca 13 000 m/s (13km/s).

b)

$$M_{\text{stjärna}} * v_{\text{stjärna}} = M_{\text{planet}} * v_{\text{planet}}$$
$$v_{\text{stjärna}} = \frac{M_{\text{planet}} * v_{\text{planet}}}{M_{\text{stjärna}}}$$
$$v_{\text{stjärna}} \approx \frac{(2 * 10^{27} * 1,3 * 10^4)}{2 * 10^{30}}$$
$$v_{\text{stjärna}} \approx \frac{1,3 * 10^{31}}{10^{30}}$$
$$v_{\text{stjärna}} \approx 1,3 * 10^1 \text{ m/s} = 13 \text{ m/s}$$

**SVAR:** Solens medelhastighet runt masscentrum pga Jupiters rörelse är ca 13 m/s.

2) a)

$$v_{\text{planet}} = \frac{2 * \pi * a}{P}$$
$$v_{\text{planet}} \approx \frac{2 * 3,14 * (0,26 * 150 * 10^9)}{60 * 24 * 60 * 60}$$
$$v_{\text{planet}} \approx \frac{245 * 10^9}{5184000}$$
$$v_{\text{planet}} \approx 47000 \text{ m/s}$$

**SVAR:** Kepler-61b rör sig kring sin stjärna med en medelhastighet av ca 47000 m/s.

b)

$$M_{\text{stjärna}} * v_{\text{stjärna}} = M_{\text{planet}} * v_{\text{planet}}$$
$$M_{\text{planet}} = \frac{M_{\text{stjärna}} * v_{\text{stjärna}}}{v_{\text{planet}}}$$
$$M_{\text{planet}} \approx \frac{(0,64 * 2 * 10^{30}) * 1,5}{47\ 000}$$
$$M_{\text{planet}} \approx \frac{(1,92 * 10^{30})}{47\ 000}$$
$$M_{\text{planet}} \approx 4 * 10^{25} \text{ kg}$$
$$M_{\text{planet}} \approx \frac{4 * 10^{25} \text{ kg}}{6 * 10^{24} \text{ kg}} \approx 0,67 * 10^1 \text{ Jordmassor} \approx 7 \text{ Jordmassor}$$

**SVAR:** Kepler-61b har en massa motsvarande ungefär 7 Jordmassor.