

Tema: Exoplaneter (Del II, Omloppstid och Avstånd)

Du har i del I sett hur man kan bestämma radien för en exoplanet om denna passerar framför sin värdstjärna. I den här delen kommer du få se hur man kan bestämma avståndet mellan en planet och en stjärna. Det kan man göra om man känner till stjärnans massa och planetens omloppstid.



Det var i början på 1600-talet som den tyska astronomen och matematikern Johannes Kepler beskrev sambandet mellan planeternas omloppstider och längden på deras banor kring solen. Kepler använde sig av Tycho Brahes noggranna observationer av planeterna och framförde då tre fysiska lagar för planeternas rörelser. I detta avsnitt ska vi titta närmare på Keplers tredje lag.

Keplers tredje lag

$$a^3 = \frac{P^2 * G * M}{4 * \pi^2}$$

Där:

a = Medelavståndet mellan stjärnan och planeten (i m)

P = Omloppstiden för planeten (i sekunder)

M = Massan för solen (i kg)

G = Den universala gravitationskonstanten ($\approx 6,67 * 10^{(-11)}$)

Om man i stället använder sig av andra enheter, kan man uttrycka sambandet enklare. Om man nu i stället för sekunder uttrycker omloppstiden i år, avståndet i astronomiska enheter (ae) och massan i solmassor, blir sambandet enklare. En astronomisk enhet är medelavståndet mellan Jorden och Solen.

$$a^3 = P^2 * M$$

Exempel 1:

Ungefär hur stort är avståndet mellan Jupiter och Solen? Det tar ca 12 år för Jupiter att göra ett varv kring Solen. (Svara i antal astronomiska enheter)

Lösning:

$$a^3 = P^2 * M$$

$$a^3 = 12^2 * 1 \quad \leftarrow \text{Multiplitera med 1, eftersom solens massa är 1, uttryckt i solmassor}$$

$$a^3 = 144$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{144} \quad \leftarrow \text{Ta kubikroten ur båda sidor.}$$

$$a = \sqrt[3]{144} \quad \leftarrow \text{Medel avståndet är kubikroten ur HL. Titta om du hittar symbolen i din miniräknare.}$$

$$a \approx 5,2 \text{ ae}$$

Svar: Avståndet mellan Jupiter och Solen är ca 5,2 astronomiska enheter.

Exempel 2:

Omloppstiden för planeten Kepler 22b är 290 dagar. Stjärnan den kretsar runt har massan 0,97 solmassor. Hur långt är medelavståndet mellan Kepler 22b och sin stjärna? (Svara i astronomiska enheter)

Lösning:

$$a^3 = P^2 * M$$

$$a^3 = \left(\frac{290}{365}\right)^2 * 0,97$$

$$a^3 \approx (0,7945)^2 * 0,97$$

$$a^3 \approx 0,6312 * 0,97$$

$$a^3 \approx 0,6122$$

$$a = \sqrt[3]{0,6122}$$

$$a \approx 0,85 \text{ ae}$$

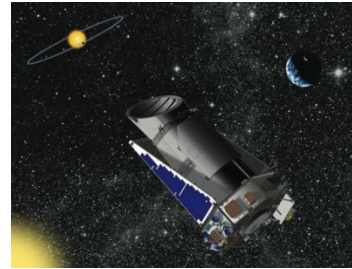
Svar: Avståndet mellan Kepler 22b och stjärnan är ca 0,85 astronomiska enheter.



Lös dessa uppgifter med hjälp av miniräknare.

- 1) Det tar 164,8 år för Neptunus att göra ett varv kring solen. Beräkna medelavståndet mellan Neptunus och Solen (*Svara i astronomiska enheter*)
- 2) Medelavståndet mellan Venus och Solen är 0,72 astronomiska enheter. Hur många år tar det för Venus att göra ett varv kring solen?

- 3) Efter att ha studerat en stjärna har man kommit fram till att en planet förmörkar ljuset från stjärnan var 120:e dag. Stjärnans massa uppskattas till 0,7 Solmassor. Hur långt från stjärnan befinner sig planeten i genomsnitt?



- a) Svara i astronomiska enheter.
- b) Svara i antal km. ($1 \text{ ae} \approx 1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$)

- 4) Planeten du räknade på i del ett (Kepler 438b) förmörkar sin stjärnas ljus var 35:e dag. Stjärnans massa är 0,54 solmassor. Hur långt bort från stjärnan befinner sig denna planet i genomsnitt? (*Svara i astronomiska enheter*)

Kluring!

- 5) Hur många kilometer från Jorden befinner sig månen? Jordens massa är $5,9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Kontrollera ditt svar på Google. Om det avviker en del, vad kan förklaringen vara? (*Tips. Använd dig av den första formen av Keplers tredje lag, med rätt enheter*)

LÖSNINGSFÖRSLAG

1)

$$a^3 = P^2 * M$$

$$a^3 = 164,8^2 * 1$$

$$a^3 = 27159,04$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{27159,04}$$

$$a = \sqrt[3]{27159,04}$$

$$a \approx 30 \text{ ae}$$

Sätt in värdet för omloppstiden (antal år) samt en solmassa.

Svar: Medelavståndet mellan Neptunus och Solen är ca 30 ae.

2)

$$a^3 = P^2 * M$$

$$P^2 = \frac{a^3}{M}$$

$$P^2 = \frac{0,72^3}{1}$$

$$P^2 \approx 0,3732$$

$$\sqrt{P^2} \approx \sqrt{0,3732}$$

$$P \approx 0,61 \text{ år} \quad (365 * 0,61 = 223 \text{ dagar})$$

Dividera båda led med M, så du får omloppstiden ensam.

Sätt in värden för medelavståndet och massan.

Svar: Det tar 0,61 år (223 dagar) för Venus att göra ett varv kring solen.

3) a)

$$a^3 = P^2 * M$$

$$a^3 = \left(\frac{120}{365}\right)^2 * 0,7$$

$$a^3 = 0,3287^2 * 0,7$$

$$a^3 = 0,1080 * 0,7$$

$$a^3 = 0,0756$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{0,0756}$$

$$a = \sqrt[3]{0,0756}$$

$$a \approx 0,42 \text{ ae}$$

Eftersom P skall uttryckas i antal år, dividerar du antalet dagar med dagar på ett år

Svar: Medelavståndet mellan planeten och stjärnan är ca 0,42ae. Dvs ca 42% av avståndet mellan Jorden och Solen.

b)

$$a = 0,42 \text{ ae} * 1,49 * 10^8$$

$$a = 0,623 \text{ ae} * 10^8 \text{ km}$$

$$a \approx 6,2 \text{ ae} * 10^7 \text{ km}$$

Svar: Medelavståndet mellan planeten och stjärnan är ca 6,2*10⁷ km (62'000'000km).

4)

$$a^3 = P^2 * M$$

$$a^3 = \left(\frac{35}{365}\right)^2 * 0,54$$

$$a^3 = 0,09589^2 * 0,54$$

$$a^3 = 0,009194 * 0,54$$

$$a^3 = 0,004964$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{0,004964}$$

$$a = \sqrt[3]{0,004964}$$

$$a \approx 0,17 \text{ ae}$$

Svar: Medelavståndet mellan Kepler 438b och stjärnan är ca 0,17ae.

5)

$$a^3 = \frac{P^2 * G * M}{4 * \pi^2}$$

Använd dig av den generella versionen av Keplers tredje lag. Du ser här att Jordens massa är given. Den är grönmarkerad. Du måste nu se att en viss information saknas, nämligen omloppstiden för månen. Denna skulle du kunna uppskatta till 30 dagar, men är mer exakt 27,3 dagar.

$$a^3 = \frac{(27,3 * 24 * 60 * 60)^2 * (6,67 * 10^{-11}) * (5,9 * 10^{24})}{4 * \pi^2}$$

Sätt in dina värden i formeln. Observera att Omloppstiden skall uttryckas i sekunder.

$$a^3 = \frac{(2358720)^2 * (6,67 * 10^{-11}) * (5,9 * 10^{24})}{4 * \pi^2}$$

Beräkna värdet i den första parentesen.

$$a^3 \approx \frac{(2,4 * 10^6)^2 * (6,67 * 10^{-11}) * (5,9 * 10^{24})}{4 * \pi^2}$$

Här avrundar vi och uttrycker hela täljaren i Tiopotensform.

$$a^3 \approx \frac{(5,76 * 10^{12}) * (6,67 * 10^{-11}) * (5,9 * 10^{24})}{4 * \pi^2}$$

Kvadrera den första termen i den första parentesen(2,4*2,4), sedan tiopotensen.

$$a^3 \approx \frac{(5,76 * 6,67 * 5,9) * (10^{12} * 10^{-11} * 10^{24})}{4 * \pi^2}$$

Arrangera termerna så tiopotenserna hamnar för sig.

$$a^3 \approx \frac{(227) * (10^{36-11})}{4 * \pi^2}$$

Multiplitera den första parentesen och sedan den andra för sig.

$$a^3 \approx \frac{(227)}{4 * \pi^2} * 10^{25}$$

Bryt ut tiopotensen så denna står ensam.

$$a^3 \approx \frac{227}{39,6} * 10^{25} \approx 5,73 * 10^{25}$$

Nu kan du utföra divisionen av termen framför tiopotensen.

$$a \approx \sqrt[3]{5,73 * 10^{25}} \approx \sqrt[3]{0,0573 * 10^{27}}$$

Ta nu kubikroten ur HL. Arrangera om termerna så exponenten i tiopotensen är jämnt delbar med 3. Detta gör du genom att göra den första termen 100ggr mindre och tiopotensen 100ggr större. Nu kan du dela upp rötterna och utföra beräkningarna var för sig.

$$a \approx \sqrt[3]{0,0573 * 10^{27}} \approx \sqrt[3]{0,0573} * \sqrt[3]{10^{27}}$$

Anledningen till att vi ville ha exponenten jämnt delbar med 3 beror på att $\sqrt[3]{10^a} = 10^{a/3}$.

$$a \approx \sqrt[3]{0,0573} * \sqrt[3]{10^{27}} \approx 0,38 * 10^{27/3}$$

$$a \approx 0,38 * 10^9 m \approx 380\,000 km$$

Svar: Medelavståndet mellan Jorden och månen är ca 380'000km.